OM DECOMPOSITIONEN AF EN CLASSE AF FUNCTIONER.

AF

CHR. JÜRGENSEN.

De Midler, hvorved man oplöser en bruden rational Function i en Sum af andre af samme Beskaffenhed, ere forlængst bekjendte. Man har derved stedse forudsat den givne Bröks Tæller at være af lavere Grad end Nævneren, og altsaa fjernet Betragtningen af den rationale og hele Function, der i modsat Fald kommer til. Dette, som ved förste Öiekast synes at være en Simplification, er det i det Mindste i een Henseende ikke; thi ved at bibeholde den rationale Function i sin meest almindelige Form, vil man baade faae en mere omfattende Decompositionsformel og et mindre sammensat Beviis for den. Det Förste förer umiddelbart til en Formel, der indeholder det bekjendte *Abelske* Theorem og et andet endnu mere almindeligt, der uden Beviis er angivet i et af *Abels* Breve; det Sidste viser, hvorledes man kan udvide Oplösningen til brudne Functioner, hvis Nævner er irrational, ved at give Tegnet $d^n f x$ en Betydning naar n ikke længer er et heelt og positivt Tal. Man træffer herved paa det Samme, som *Liouville* har lagt til Grund for sin "*calcul des différentielles à indices quelconques*" og som et af ham citeret Brev fra *Leibnitz* til *Joh. Bernoulli* viser — hvad der i historisk Henseende er ret mærkeligt — allerede at være givet af *Leibnitz* selv, der, som bekjendt, var den ene af Differentialregningens Opfindere.

Dette er Gjenstanden for den lille Afhandling, som jeg her har den Ære at forelægge det Kongelige Videnskabernes Selskab.

Antages $$f x = \frac{X}{(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots\,(x-a_n)}$$
hvor X er en rational og heel Function af x af Graden $n+p$, er $x-a_i$ en hvilkensomhelst blandt Nævnerens Factorer og betegnes Functionen $(x-a_i)\,fx$ ved $\varphi_i\,x$, betyder endelig $H(\psi t)$ Coefficienten til $\frac{1}{t}$ i Udviklingen af en Function $\psi\,t$ efter aftagende Potenser af t, saa vil man have

$$1) \qquad fx = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{\varphi_i\,a_i}{x-a_i} + H\left(\frac{ft}{t-x}\right)$$

For at overbevise sig herom behöver man blot at antage

$$fx = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} + B_0\,x^p + B_1\,x^{p-1} + \ldots + B_{p-1}\,x + B_p.$$

Multipliceres paa begge Sider med $(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ og sættes vexelviis $x=a_1$, $x=a_2$, ... $x=a_n$, saa findes

$$A_i = \varphi_i\,a_i.$$

Bemærkes dernæst, at $B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_{p-1}\,x + B_p$ ere de $p+1$ förste Led af Udviklingen af fx efter aftagende Potenser af x, forandres x til t og multipliceres med

$$\frac{1}{t-x} = \frac{1}{t} + \frac{x}{t^2} + \frac{x^2}{t^3} + \ldots,$$

saa bliver $B_0\,x^p + B_1\,x^{p-1} + \ldots + B_{p-1}\,x + B_p = H\left(\frac{ft}{t-x}\right)$.

Differentierer man Ligningen (1.) et vilkaarligt Antal Gange med Hensyn til enhver af Störrelserne $a_1\,a_2\ldots a_n$, saa uddrager man uden Vanskelighed fölgende almindelige Sætning.

Naar $$Fx = \frac{X}{(x-a_1)^{1+\mu_1}\,(x-a_2)^{1+\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1+\mu_n}},$$

hvor X er en heel Function af hvilkensomhelst Grad, og naar $(x-a_i)^{1+\mu_i} Fx = \varphi_i x$, saa er

$$2) \qquad Fx = \underset{i=1}{\overset{i=n}{S}} \frac{d^{\mu_i}\left(\dfrac{\varphi_i a_i}{x-a_i}\right)}{1.2.3\ldots\mu_i \, d a_i^{\mu_i}} + H\left(\frac{Ft}{t-x}\right),$$

hvilken indbefatter Decompositionen af enhver rational Function.

Af Ligningen (*1.*) danner man let en anden, der indeholder saavel den Sætning af *Abel*, der findes i hans Afhandling i *Crelles* Journal für die Mathematik 3die Bd. S. 313 f., som den mere omfattende, han i et Brev til *Legendre*, trykt i samme Journal 6te Bd. S. 73 f, har angivet. Forövrigt vil man let blive opmærksom paa, at den fölgende Fremstilling af Beviset for disse Sætninger kun er en Simplification af *Abels* eget Raisonnement.

Man sætte förste Ligningen (*1.*) under Formen

$$\frac{fx}{\varphi x} = \underset{i=1}{\overset{i=n}{S}} \frac{fa_i}{(x-a_i)\,\varphi_i a_i} + H\left\{\frac{ft}{(t-x)\,\varphi t}\right\},$$

hvor f og φ ere to hele Functioner af vilkaarlig Grad og hvor $\varphi_i x$ betyder Functionen $\dfrac{\varphi x}{x-a_i}$, idet man antager

$$\varphi x = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Betragter man nu Coefficienterne i fx saavelsom Störrelserne A, a_1, a_2, ... a_n som Functioner af en anden Variabel y, saa har man

$$\varphi_i a_i = -\left(\frac{d\varphi x}{dy}\right)\frac{dy}{da_i} \text{ naar man deri sætter } x = a_i,$$

saa at man ved for Kortheds Skyld at antage $\left(\dfrac{d\varphi x}{dx}\right) = \varphi' x$ erholder

$$\frac{fx}{\varphi x} = \underset{i=1}{\overset{i=n}{S}} \frac{fa_i}{(a_i-x)\,\varphi' a_i}\,\frac{da_i}{dy} + H\left\{\frac{ft}{(t-x)\,\varphi t}\right\},$$

hvoraf, idet man integrerer med Hensyn til y,

$$3)\quad \int \frac{fx}{\varphi x}\, dy = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \int \frac{f a_i}{(a_i - x)\,\varphi' a_i} \frac{d a_i}{d y} dy + H \left\{ \int \frac{ft.\, dy}{(t-x)\,\varphi t} \right\} + C,$$

hvor C er uafhængig af y.

Dersom nu πx og $\psi x = pq$ betegne to hele Functioner af x alene, r og s derimod to Functioner af x og y, men rationale og hele med Hensyn til x, saa vil man ved at anvende Ligningen (3.) paa Functionen

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{2\pi x \left\{ r \left(\frac{ds}{dy}\right) - s \left(\frac{dr}{dy}\right) \right\}}{p r^2 - q s^2}$$

og bemærke, at $\left(\frac{d \varphi x}{d y}\right) = 2 \left\{ pr \left(\frac{dr}{dy}\right) - qs \left(\frac{ds}{dy}\right) \right\}$,

samt at $x = a_i$ giver $p r^2 - q s^2 = 0$, altsaa

$$pr = \pm s \sqrt{\psi a_i}, \quad qs = \pm r \sqrt{\psi a_i}$$

finde
$$\frac{f a_i}{\varphi' a_i} = \mp \frac{\pi a_i}{\sqrt{\psi a_i}},$$

hvilken Værdi, indsat i Ligningen (3.), giver den förstnævnte Sætning. Man indseer, at det, for at danne lignende Sætninger, blot kommer an paa Valget af den Function, der oplöses. Ved en lille Forandring i Formen af den nylig betragtede Function vil det let vise sig, hvorledes man kommer til det andet mere almindelige Theorem.

Antager man nemlig $p = 1$, altsaa $q = \psi x$, skriver r_0 og r_1 istedetfor r og s og sætter

$$\theta_0 = r_0 + r_1 \sqrt{q}, \quad \theta_1 = r_0 + \alpha r_1 \sqrt{q}$$

hvor 1 og α ere de to Rödder af Ligningen $x^2 - 1 = 0$, saa har man, idet $\left(\frac{d\theta_0}{dy}\right)$ og $\left(\frac{d\theta_1}{dy}\right)$ betegnes ved θ_0' og θ'_1,

$$\frac{f\,x}{\varphi\,x} = \frac{\pi\,x}{\sqrt{q}}\left\{\frac{\theta_0'}{\theta_0} + \alpha\,\frac{\theta_1'}{\theta_1}\right\},$$

eller
$$\frac{f\,x}{\varphi\,x} = \frac{\pi\,x}{\sqrt{\psi\,x}}\left\{\frac{\theta_0'\,\theta_1 - \theta_1'\,\theta_0}{\theta_0\,\theta_1}\right\},$$

hvoraf
$$\frac{f\,a_i}{\varphi'\,a_i} = \frac{\pi\,a_i}{\sqrt{\psi\,a_i}}\left\{\frac{\theta'_0\,\theta_1 - \theta_1'\,\theta_0}{\theta_0'\,\theta_1 + \theta_1'\,\theta_0}\right\}$$

naar man indenfor Parenthesen sætter $x = a_i$. Herved forsvinder enten θ_0 eller θ_1, fölgelig

$$\frac{f\,a_i}{\varphi'\,a_i} = \varepsilon\,\frac{\pi\,a_i}{\sqrt{\psi\,a_i}},$$

hvor ε enten er $= +1$ eller -1, alt eftersom θ_0 eller θ_1 bliver Nul. Denne Regel er ogsaa given af *Abel* i den citerede Afhandling.

Man gaaer nu uden Vanskelighed over til den almindelige Sætning. Erindrer man nemlig, at naar $\lambda\,x$ betegner en rational bruden Function, hvis Udvikling i Række være

$$\lambda\,x = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots,$$

og naar $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\, \alpha^{m-1}$ ere Rödderne af Ligningen $x^m - 1 = 0$, saa har man

$$\lambda\,(x) + \alpha^{-\mu}\,\lambda\,(\alpha\,x) + \alpha^{-2\mu}\,\lambda\,(\alpha^2\,x) + \ldots\ldots + \alpha^{-(m-1)\mu}\,\lambda\,(\alpha^{m-1}\,x) =$$
$$= m\,x^{\mu}\left\{A_{\mu} + A_{m+\mu}\,x^{m} + A_{2m+\mu}\,x^{2m} + \ldots\right\}$$

(see t. Ex. *Crelles* Journal für die Math. 6te Bd. S. 196—197), og lader man derhos θ_k betegne den med Hensyn til $q^{\frac{1}{m}}$ rationale og hele Function

$$r_0 + \alpha^{k} r_1 q^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} r_2 q^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha^{(m-1)k} r_{m-1} q^{\frac{m-1}{m}},$$

hvor $r_0, r_1, r_2, \dots r_{m-1}$ ere Functioner af x og y, men rationale og hele med Hensyn til x, og hvor q som ovenfor betyder ψx, saa indseer man, at Functionen

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\pi x}{q^{\frac{\mu}{m}}} \left\{ \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \alpha^{-\mu} \frac{\theta'_1}{\theta_1} + \alpha^{-2\mu} \frac{\theta'_2}{\theta_2} + \dots + \alpha^{-(m-1)\mu} \frac{\theta'_{m-1}}{\theta_{m-1}} \right\},$$

hvor θ' stedse betegner $\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$ og πx har samme Betydning som ovenfor, maa være rational med Hensyn til q, og fölgelig ogsaa med Hensyn til x.

Sætter man nu $\theta_0 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{m-1} = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, saa finder man ved at bringe til eens Benævning og differentiere Nævneren

$$\frac{f a_i}{\varphi' a_i} = \frac{\pi a_i}{(\psi a_i)^{\frac{\mu}{m}}} \left\{ \frac{\theta'_0 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{m-1} + \alpha^{-\mu} \theta'_1 \theta_0 \theta_2 \dots \theta_{m-1} + \dots}{\theta'_0 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{m-1} + \theta'_1 \theta_0 \theta_2 \dots \theta_{m-1} + \dots} \right\}$$

naar man indenfor Parenthesen sætter $x = a_i$; herved maa een af Störrelserne $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{m-1}$ forsvinde, saa at man erholder

$$\frac{f a_i}{\varphi' a_i} = \varepsilon \frac{\pi a_i}{(\psi a_i)^{\frac{\mu}{m}}},$$

idet ε er $=$ een af Störrelserne $1, \alpha^{-\mu}, \alpha^{-2\mu}, \dots \alpha^{-(m-1)\mu}$, alt eftersom $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{m-1}$ bliver Nul naar $x = a_i$. Indsættes denne Værdi i Ligningen (3.) og bemærkes, at

$$\int \frac{fx}{\varphi x}\,dy = \frac{\pi x}{(\psi x)^{\frac{\mu}{m}}}\left\{\log \theta_0 + \alpha^{-\mu}\log\theta_1 + \alpha^{-2\mu}\log\theta_2 + \dots\right.$$

$$\left. + \alpha^{-(m-1)\mu}\log\theta_{m-1}\right\}$$

saa har man en almindelig Sætning om transcendente Functioner af Formen

$$\int \frac{\pi(z)\,dz}{\sqrt[m]{(\psi z)^{\mu}}}$$

hvor Functionerne π og ψ ere rationale og hele; men for det Tilfælde at π er en bruden Function danner man let en tilsvarende Sætning paa samme Maade, som dette skeer ved den speciellere Sætning (see den cit. Afh. pag. 319—320).

Formlen (3.) forudsætter, at Nævnerens Factorer ere uligestore; i modsat Fald maatte man anvende Ligningen (2.), men en særskildt Betragtning heraf, er efter hvad *Abel* i den cit. Afh. pag. 317—318 har viist, overflödig.

Da Ligningen (2.) er udledt af Lign. (1.) blot ved at differentiere gjentagne Gange med Hensyn til Störrelserne a_1, a_2, ... a_n og derefter at dividere med $1.2.3. \dots \mu_1$, $1.2.3. \dots \mu_2$ o. s. v., saa behöver man, for at udvide den til Værdier af μ_1, μ_2, o. s. v., der ikke ere hele og positive, blot at danne en saadan Operation d^{μ}, at den for enhver, heel og bruden, positiv og negativ Værdi af μ giver

$$\frac{d^{\mu}\left\{\frac{1}{x-a}\right\}}{\Gamma_{(\mu+1)}\,da^{\mu}} = \frac{1}{(x-a)^{\mu+1}},$$

hvor Tegnet Γ har den sædvanlige Betydning. Dette opnaaes ved at sammenligne de to Udtryk

$$\frac{1}{x-a} = (-1) \left\{ a^{-1} + a^{-2} x + a^{-3} x^2 + \ldots \right\}$$

$$\frac{1}{(x-a)^{\mu+1}} = (-1)^{\mu+1} \left\{ a^{-(\mu+1)} + \frac{\mu+1}{1} a^{-(\mu+2)} x + \right.$$

$$\left. \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1 \;.\; 2} a^{-(\mu+3)} x^2 + \ldots \right\},$$

hvilket viser, at hiin Betingelse falder sammen med fölgende

$$\frac{d^\mu a^{-p}}{1.2.3. \ldots . \mu \, d a^\mu} = (-1)^\mu \frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p-1)}{1 \;.\; 2 \;\ldots .\; (p-1)} a^{-(\mu+p)}$$

eller, anderledes skrevet,

$$\frac{d^\mu a^{-p}}{d a^\mu} = (-1)^\mu \frac{\Gamma(p+\mu)}{\Gamma(p)} a^{-(p+\mu)}$$

hvilken er een af de Førmler, som *Liouville* i sine Undersögelser om dette Slags Differentialer har lagt til Grund (see t. Ex. *Crelles* Journ. f. d. M. 11te Bd. S. 1 f.). Med Hensyn til nærværende Anvendelse deraf vil man stedse kunne antage μ at være en negativ Brök, indbefattet mellem 0 og -1, og altsaa give hiin Definition fölgende Form

$$(-1)^\mu \int^\mu (a^{-p}) \, d a^\mu = \frac{\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(p)} \frac{1}{a^{p-\mu}},$$

hvor μ altid er positiv og indbefattet mellem 0 og 1. Ved Hjelp heraf finder man let, igjennem et bestemt Integral, et Udtryk for $\int^\mu fa . \, d a^\mu$, naar fa betyder en Function af a, der kan udvikles i en Række af Formen

$$fa = \Sigma \frac{N_p}{a^p},$$

hvor p stedse er positiv og större end μ. Man har nemlig under denne Forudsætning,

$$(-1)^\mu \int^\mu fa\,.\,d\,a^\mu = \Sigma\,\frac{\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(p)}\,\frac{N_p}{a^{p-\mu}},$$

hvilken Ligning, ifölge den bekjendte Relation,

$$\int_0^1 \theta^{m-1}\,(1-\theta)^{n-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

transformeres til fölgende:

$$(-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu fa\,.\,d\,a^\mu = \Sigma \int_0^1 \frac{N_p}{a^{p-\mu}}\,\theta^{p-\mu-1}\,(1-\theta)^{\mu-1}\,d\theta,$$

som man ogsaa kan skrive saaledes:

$$(-1)^\mu\,\Gamma(\mu) \int^\mu fa\,.\,d\,a^\mu = a^\mu\,\Sigma \int_0^1 \frac{N_p\,\theta^p}{a^p}\,\frac{(1-\theta)^{\mu-1}}{\theta^{\mu+1}}\,d\,\theta,$$

hvoraf fölger

$$4)\quad \int^\mu fa\,.\,d\,a^\mu = \frac{a^\mu}{(-1)^\mu\,\Gamma(\mu)} \int_0^1 f\frac{a}{\theta}\,\frac{(1-\theta)^{\mu-1}}{\theta^{\mu+1}}\,d\,\theta.$$

Denne Formel er ikke forskjellig fra den, som findes i *Liouvilles* Afhandling i nysnævnte Journals 12te Bd. S. 281 överst, hvorom man overbeviser sig ved blot at sætte $x\,.\,fx$ istedetfor $F(\sqrt{x})$ og forandre x til a.

Antager man $\theta = \frac{a}{a+\alpha}$, altsaa $d\,\theta = -\frac{a\,d\,\alpha}{(a+\alpha)^2}$, og Grændserne $\alpha = \infty$, $\alpha = 0$, saa har man, naar disse vendes om,

$$(-1)^\mu\,\Gamma(\mu)\,\int^\mu fa\,.\,d\,a^\mu = \int_0^\infty f(a+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\,\alpha,$$

hvilket er det Udtryk, hvorfra *Liouville* i den sidstanförte Afhandling er gaaet ud. Dette svarer til den oprindelige Definition

$$\frac{d^\mu e^{na}}{d a^\mu} = n^\mu e^{na},$$

som *Liouville* i *Journal de l'école polytechnique cah. 21* har lagt til Grund, og som allerede *Leibnitz* noget anderledes havde angivet i et Brev til *Joh. Bernoulli*, der findes i *commercium epistolicum Leibnitii et Joh. Bernoullii Tom. 1 pag. 107*, ligesom det ovenstaaende (4.) svarer til Definitionen

$$\frac{d^\mu a^{-p}}{d a^\mu} = (-1)^\mu \frac{\Gamma(p+\mu)}{\Gamma(p)} a^{-(p+\mu)}.$$

Overeensstemmelsen mellem begge Definitioner, der iövrigt af *Liouville* er udviklet paa andre Maader, bekræftes ved Overeensstemmelsen mellem de to Udtryk ved bestemte Integraler, der forresten begge forudsætte, at Functionen fa forsvinder naar $a = \infty$. Den sidste er ogsaa af *Liouville* godtgjort i den citerede Afhandling i *Crelles* Journal 12te Bd., paa en fra den her anvendte noget forskjellig Maade.

Udvidelsen af Ligningen (2.) til negative og brudne Værdier af $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$, beliggende mellem Grændserne 0 og -1, er nu kun en simpel Anvendelse af Ligningen (4.). Forudsættes nemlig Graden af Tælleren i Fx at være mindre end Graden af Nævneren, saa kan Functionen $\frac{\varphi_i a_i}{x - a_i}$ udvikles i en Række af Formen $\Sigma \frac{N_p}{a^p{}_i}$ hvori p stedse er större end μ_i. Man har i dette Tilfælde

$$H \left\{ \frac{Ft}{t-x} \right\} = 0; \text{ altsaa, idet}$$

$$Fx = \frac{X}{(x-a_1)^{1-\mu_1} (x-a_2)^{1-\mu_2} \ldots (x-a_n)^{1-\mu_n}}, \text{ og } \varphi_i x = (x-a_i)^{1-\mu_i} Fx,$$

$$Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i} d a_i^{\mu_i},$$

eller, naar Integralet $\int^\mu$ ved Hjelp af Ligningen (4.) omdannes til bestemt Integral,

$$Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{a_i^{\mu_i}}{(-1)^{\mu_i}\Gamma(\mu_i)\Gamma(1-\mu_i)} \int_0^1 \frac{\varphi_i \frac{a_i}{\theta}}{\theta x - a_i} \frac{d\theta}{\theta^{\mu_i}(1-\theta)^{1-\mu_i}},$$

der, naar man erindrer, at $\Gamma(\mu_i)\Gamma(1-\mu_i) = \frac{\pi}{\sin \mu_i \pi}$, kan skrives saaledes

$$Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{a_i^{\mu_i} \sin \mu_i \pi}{(-1)^{\mu_i} \pi} \int_0^1 \frac{\varphi_i \frac{a_i}{\theta}}{\theta x - a_i} \frac{d\theta}{\theta^{\mu_i}(1-\theta)^{1-\mu_i}}.$$

Denne Ligning kan man give en simplere Form ved at bemærke, at

$$\varphi_i x = Fx \,.\, (x-a_i)^{1-\mu_i},$$

hvoraf $$\varphi_i \frac{a_i}{\theta} = F\frac{a_i}{\theta} \,.\, (1-\theta)^{1-\mu_i} \left(\frac{a_i}{\theta}\right)^{1-\mu_i},$$

og fölgelig

$$5)\quad Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{\sin \mu_i \pi}{(-1)^{\mu_i} \pi} \int_0^1 \frac{F\frac{a_i}{\theta}}{\theta x - a_i} \frac{a_i\, d\theta}{\theta}.$$

Dersom $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \frac{1}{2}$, saa er

$$Fx = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \int_0^1 \frac{F\frac{a_i}{\theta}}{\theta x - a_i} \frac{a_i\, d\theta}{\theta},$$

hvilket Udtryk let verificeres naar $n = 1$ eller $n = 2$.

Ligningen (5.) forudsætter, at Graden af Tælleren i Fx er mindre end Graden af Nævneren. I modsat Fald förer Analogien til at antage den samme Ligning gjeldende naar blot Functionen $H\,\frac{Ft}{t-x}$ tilföies.

For at undersöge dette antage man

$$Fx = \frac{1}{(x-a_1)^{1-\mu_1}\,(x-a_2)^{1-\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1-\mu_n}};$$

man har da efter det Foregaaende

$$Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{\varphi_i a_i}{x-a_i}\, d a_i^{\mu_i}.$$

Multipliceres dette paa begge Sider med x^m, hvor m er et heelt Tal, bemærkes, at

$$\frac{x^m}{x-a_i} = \frac{a_i^m}{x-a_i} + a_i^{m-1} + a_i^{m-2}x + a_i^{m-3}x^2 + \ldots + a_i x^{m-2} + x^{m-1}$$

og betegnes for Kortheds Skyld $\mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} a^k \varphi_i a_i \,.\, d a_i^{\mu_i}$ ved S_k,

saa er $x^m Fx = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \int^{\mu_i} \frac{a_i^m \varphi_i a_i}{x-a_i}\, d a_i^{\mu_i} + S_{m-1} + S_{m-2}x + S_{m-3}x^2 + \ldots + S_1 x^{m-2} + S_0 x^{m-1}$.

Udvikles Fx paa sædvanlig Maade efter aftagende Potenser af x, saa vil Udviklingen, naar specielle Tilfælde undtages, komme til at indeholde brudne Potenser; en Udvikling efter negative hele Potenser vil man derimod kunne udlede af nysnævnte Udtryk for Fx ved ubestemte Integraler; dette giver nemlig

$$Fx = \frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \ldots + \frac{S_{m-2}}{x^{m-1}} + \frac{S_{m-1}}{x^m} + \ldots$$

altsaa $t^m F t = S_0 t^{m-1} + S_1 t^{m-2} + S_2 t^{m-3} + \ldots + S_{m-2} t + S_{m-1} + \ldots$

hvilket, multipliceret med $\dfrac{1}{t-x} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{x}{t^2} + \dfrac{x^2}{t^3} + \ldots\ldots$

giver $H\left(\dfrac{t^m F t}{t-x}\right) = S_{m-1} + S_{m-2} x + S_{m-3} x^2 + \ldots + S_1 x^{m-2} + S_0 x^{m-1}$.

Hvad her er sagt om $x^m F x$ gjelder naturligviis ogsaa om $X . F x$ naar X er en rational og heel Function af vilkaarlig Grad, og man slutter saaledes, at naar man antager

$$F x = \frac{X}{(x-a_1)^{1-\mu_1}(x-a_2)^{1-\mu_2}\ldots(x-a_n)^{1-\mu_n}},$$

saa er $F x = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu_i)} \displaystyle\int^{\mu_i} \dfrac{\varphi_i\, a_i}{x-a_i}\, d\, a_i^{\mu_i} + H \left\{\dfrac{F t}{t-x}\right\}$,

hvilken Formel giver den fuldstændige Udvidelse af Ligningen (2) til brudne Exponenter. En direct Verification af denne Sætning lader sig ved ligefrem Integration kun opnaae i et Par specielle Tilfælde; men endskjöndt den Maade, hvorpaa den er funden, ikke synes at efterlade Tvivl om dens Rigtighed, vil den dog, saavel med Hensyn til den umiddelbare Bekræftelse, som til det Forhold, hvori den synes at staae til den Abelske Sætning, gjöre en nærmere Undersögelse nödvendig.